MATHÉMATIQUES

Chapitre 5 : étude de fonctions numériques

OBJECTIFS Ce que tu dois savoir faire

- ✓ Calculer les limites d'une fonction en l'infini et en un point
- ✓ Étudier la continuité et la dérivabilité d'une fonction en un point
- ✓ Calculer la dérivée d'une fonction (polynôme, homographique)
- ✓ Réaliser l'étude complète d'une fonction et tracer sa courbe

VOCABULAIRE Définitions clés

Limite en +∞	Valeur dont f(x) se rapproche quand x devient très grand
Continuité en a	f continue en a si lim f(x) = f(a) quand x→a
Dérivée f'(a)	Taux de variation instantané de f au point a

COURS L'essentiel du cours

FORMULE

Dérivée polynôme

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \ ; \ (ax+b)' = a \ ; \ (\text{constante})' = 0$$

Règle puissance de base

FORMULE

Dérivée homographique

$$(ax+b/cx+d)' = (ad-bc)/(cx+d)^2$$

Numérateur = déterminant

FORMULE

Limite fraction 1/x

$$\lim(x\to+\infty)\ 1/x^n = 0 \ ; \ \lim(x\to0^+)\ 1/x = +\infty$$

Référence absolue à mémoriser

MÉTHODE

Étude complète d'une fonction

1. **1. Domaine et limites**

   Déterminer Df, calculer les limites aux bornes et identifier les asymptotes.

2. **2. Dérivée et variations**

   Calculer f'(x), résoudre f'(x)=0, dresser le tableau de signes et de variations.

3. **3. Courbe**

   Placer les points clés (extremums, intersections axes) et tracer la courbe représentative.

EXEMPLE

Exemple résolu — BAC Série A

ENONCE

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 2$. Étudier les variations et dresser le tableau de variations.

RESOLUTION

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. $f'(x)=0$ pour $x=-1$ et $x=1$. $f'(x)>0$ sur $]-\infty;-1[$ et $]1;+\infty[$, $f'(x)<0$ sur $]-1;1[$. Maximum local $f(-1)=4$, minimum local $f(1)=0$.

EXERCICES

Exercices d'application

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} (2x^3 - 5x + 3)$ et $\lim_{x\to-\infty} (2x^3 - 5x + 3)$.

   3 pts

2. Dériver $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ et résoudre $f'(x) = 0$.

   3 pts

3. Donner les asymptotes de $g(x) = (2x+1)/(x-3)$ et calculer $g'(x)$.

   4 pts

ASTUCES

Astuces et pièges

- Polynôme en $\pm\infty$: seul le terme de plus haut degré compte, ignorer les autres.
- Pour lever $\infty-\infty$: factoriser par le terme dominant avant de conclure.
- ▲ Piège : $\lim_{x\to0} 1/x$ n'existe pas car les limites à gauche ($-\infty$) et à droite ($+\infty$) sont différentes.

★ À retenir absolument

- Forme indéterminée (∞/∞, $0/0$…) → toujours lever avant de conclure
- $f'(x) > 0 \Longrightarrow f$ croissante ; $f'(x) < 0 \Longrightarrow f$ décroissante sur l'intervalle
- Asymptote verticale $x=a$ si $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$; horizontale $y=L$ si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = L$