

MATHÉMATIQUES

Chapitre 8 : Variables aleatoires

OBJECTIFS Ce que tu dois savoir faire

- ✓ Définir une variable aléatoire et construire sa loi de probabilité
- ✓ Identifier et modéliser une épreuve de Bernoulli
- ✓ Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type d'une variable aléatoire
- ✓ Appliquer la loi binomiale $B(n,p)$ et calculer ses paramètres

VOCABULAIRE Définitions clés**Variable aléatoire**

Fonction associant un nombre réel à chaque résultat d'une expérience aléatoire

Loi de Bernoulli $B(p)$

Expérience à deux issues : succès (p) ou échec ($1-p$)

Loi binomiale $B(n,p)$

Nombre de succès en n épreuves de Bernoulli indépendantes

COURS L'essentiel du cours

FORMULE

Espérance

$$E(X) = \sum x_i \cdot P(X = x_i)$$

Valeur moyenne sur le long terme

FORMULE

Variance (Koenig)

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Moyenne des carrés moins carré moyenne

FORMULE

Loi binomiale

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \mid E(X) = np \mid V(X) = np(1-p)$$

Conditions : indépendance, n fixé, p constant

MÉTHODE Calculer $E(X)$ et $V(X)$ à partir d'une loi

1 Étape 1 – Vérifier

S'assurer que la somme de toutes les probabilités vaut 1.

2 Étape 2 – Espérance

Calculer $E(X) = \sum x_i \cdot P(X = x_i)$ en multipliant chaque valeur par sa probabilité.

3 Étape 3 – Variance

Calculer $E(X^2) = \sum x_i^2 \cdot P(X = x_i)$ puis $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

EXEMPLE Exemple résolu — BAC Série A

ENONCE

On lance 4 fois une pièce équilibrée. X = nombre de Pile obtenus. Calculer $P(X=2)$, $E(X)$ et $V(X)$.

RESOLUTION

X suit $B(4; 0,5)$. $P(X=2) = C_4^2 \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5)^2 = 6 \times 0,0625 = 0,375$. $E(X) = np = 4 \times 0,5 = 2$. $V(X) = np(1-p) = 4 \times 0,5 \times 0,5 = 1$.
 $\sigma(X) = \sqrt{1} = 1$.

EXERCICES Exercices d'application

1 X : valeurs 1, 2, 3 avec proba 0,3 ; 0,4 ; 0,3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

3 pts

2 Un QCM a 5 questions, chaque réponse correcte a proba 0,4. Calculer $P(X = 3)$ avec $X \sim B(5; 0,4)$.

3 pts

3 Un jeu donne +200 F (proba 1/4) ou -100 F (proba 3/4). Le jeu est-il favorable ?

4 pts

ASTUCES Astuces et pièges

- Pour $B(n,p)$: retenir $E(X) = np$ et $\sigma(X) = \sqrt{npq}$ suffit pour 80% des questions.
- Toujours vérifier $\sum P(X = x_i) = 1$ avant tout calcul.
- ▲ Piège : $V(aX + b) = a^2V(X)$, la constante b ne change PAS la variance.

★ À retenir absolument

- $\sum P(X = x_i) = 1$ toujours ; sinon la loi est incorrecte.
- Loi binomiale $B(n,p)$ exige n épreuves indépendantes, identiques, à deux issues.
- Jeu équitable $\Leftrightarrow E(X) = 0$; favorable $\Leftrightarrow E(X) > 0$.