

MATHÉMATIQUES

Theme 10 : Fonctions logarithmes

OBJECTIFS Ce que tu dois savoir faire

- ✓ Connaître la définition et les propriétés algébriques de \ln
- ✓ Résoudre des équations et inéquations logarithmiques
- ✓ Calculer la dérivée de fonctions composées avec \ln
- ✓ Étudier une fonction contenant \ln (variations, limites, courbe)

VOCABULAIRE Définitions clés

$\ln(x)$	Réciproque de e^x : $\ln(x) = y \iff e^y = x$, défini sur $]0; +\infty[$
$\log_{10}(x)$	Logarithme décimal : $\log(x) = \ln(x)/\ln(10)$
$\log_a(x)$	Logarithme en base $a > 0, a \neq 1$: $\log_a(x) = \ln(x)/\ln(a)$

COURS L'essentiel du cours

FORMULE

Propriétés algébriques

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad | \quad \ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b) \quad | \quad \ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$$

Produit \rightarrow somme, quotient \rightarrow différence

FORMULE

Dérivée composée

$$[\ln(u)]' = u'/u$$

Valable si $u(x) > 0$

FORMULE

Limites fondamentales

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad | \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad | \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)/x = 0$$

\ln croît moins vite que x

1. Déterminer le domaine

Identifier les conditions $x > 0$ pour que chaque ln soit défini.

2. Transformer l'équation

Utiliser les propriétés pour regrouper en un seul ln, puis passer à l'exponentielle.

3. Conclure et vérifier

Résoudre l'équation obtenue et vérifier que la solution appartient au domaine.

EXEMPLE

Exemple résolu — BAC Série C**ENONCE**

Résoudre dans \mathbb{R} : $\ln(x+2) + \ln(x-1) = \ln(4)$. Préciser le domaine de validité.

RESOLUTION

Domaine : $x+2 > 0$ et $x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$. | $\ln((x+2)(x-1)) = \ln(4) \Rightarrow (x+2)(x-1) = 4$ | $x^2+x-2 = 4 \Rightarrow x^2+x-6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0$ | $x = -3$ (rejeté, hors domaine) ou $x = 2$ ✓ $\Rightarrow S = \{2\}$

EXERCICES

Exercices d'application

1 Simplifier : $2\ln(3) + \ln(2) - \ln(18)$

3 pts

2 Dériver $f(x) = \ln(x^2+3x+2)$ sur son domaine de définition

4 pts

3 Résoudre l'inéquation : $\ln(2x-1) \geq \ln(x+3)$

5 pts

ASTUCES

Astuces et pièges

- $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$: utiliser la bijectivité pour simplifier les équations
- $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$ car ln est strictement croissante
- ▲ $\ln(a+b) \neq \ln(a) + \ln(b)$ — la propriété ne vaut que pour le PRODUIT

★ À retenir absolument

- $e^{\ln(x)} = x$ et $\ln(e^x) = x$: les deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre
- ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ donc $\ln(a)$
- La primitive de $1/x$ est $\ln|x| + C$ et celle de u'/u est $\ln|u| + C$