

## MATHÉMATIQUES

# Theme 11 : Fonctions exponentielles

## OBJECTIFS

**Ce que tu dois savoir faire**

- ✓ Connaître la définition et les propriétés algébriques de la fonction exponentielle
- ✓ Résoudre des équations et inéquations exponentielles
- ✓ Étudier les variations, limites et croissances comparées de exp
- ✓ Utiliser les primitives et dérivées de fonctions composées avec exp

## VOCABULAIRE

**Définitions clés****Fonction exponentielle**Unique fonction  $f$  vérifiant  $f' = f$  et  $f(0) = 1$ **Exponentielle de base  $a$** Fonction  $a^x = e^{x \cdot \ln a}$ , avec  $a > 0$ **Croissances comparées** $e^x/x^n \rightarrow +\infty$  : exp domine toute puissance

## COURS

**L'essentiel du cours**

## FORMULE

**Propriétés algébriques**

$$e^{(a+b)} = e^a \cdot e^b \quad | \quad e^{(a-b)} = e^a / e^b \quad | \quad (e^a)^n = e^{(na)}$$

*Somme  $\rightarrow$  produit, différence  $\rightarrow$  quotient*

## FORMULE

**Dérivée composée**

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

 *$u$  fonction dérivable quelconque*

## FORMULE

**Limite fondamentale**

$$\lim_{(x \rightarrow 0)} (e^x - 1)/x = 1$$

*Taux de variation en 0*

**1** Étape 1 – Isoler ou substituer

Si  $e^x$  apparaît plusieurs fois, poser  $X = e^x$  ( $X > 0$ ) pour se ramener à une équation polynomiale.

**2** Étape 2 – Appliquer l'injectivité

Utiliser  $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ , ou  $e^a = k > 0 \Leftrightarrow a = \ln k$ .

**3** Étape 3 – Vérifier le signe

Rejeter toute solution donnant  $e^x \leq 0$ , impossible car  $e^x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

## EXEMPLE

## Exemple résolu — BAC Série C

## ENONCE

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  :  $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ .

## RESOLUTION

On pose  $X = e^x > 0 \rightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \rightarrow (X-1)(X-2) = 0$ .  $X=1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$ .  $X=2 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$ . Solution :  $S = \{0 ; \ln 2\}$ .

## EXERCICES

## Exercices d'application

**1** Résoudre  $e^{3x-1} = e^{x+5}$  dans  $\mathbb{R}$ .

3 pts

**2** Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2) / e^x$ .

3 pts

**3** Dériver  $f(x) = e^{x^2-2x+1}$  et dresser son tableau de variations.

4 pts

## ASTUCES

## Astuces et pièges

- Pour factoriser, repérer  $e^x$  comme facteur commun avant tout calcul de limite.
- ▲ Piège :  $e^{2x} \neq 2e^x$  ; il faut écrire  $e^{2x} = (e^x)^2$ .

## ★ À retenir absolument

- $e^x > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  : l'exponentielle ne s'annule jamais.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x / x^n = +\infty$  : exp l'emporte toujours sur les puissances.
- $\ln(e^x) = x$  et  $e^{(\ln x)} = x$  : relations réciproques fondamentales.