MATHÉMATIQUES

Theme 12 : propriétés des fonctions continues ou derivables

OBJECTIFS Ce que tu dois savoir faire

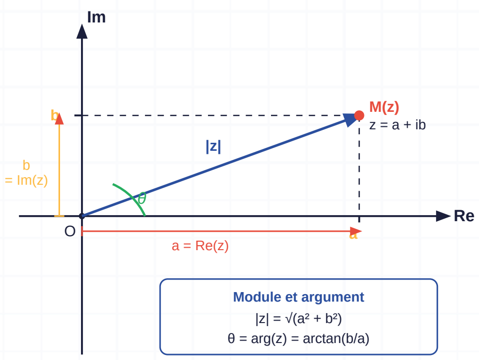
- Maîtriser la notion de continuité en un point et sur un intervalle
- Calculer une dérivée et interpréter géométriquement la dérivabilité en un point
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer l'existence de solutions
- Utiliser les théorèmes de Rolle et des accroissements finis dans des démonstrations

VOCABULAIRE Definitions cles

Continuité en a	f continue en a si lim(x→a) f(x) = f(a)
Dérivabilité en a	Limite finie du taux d'accroissement en a
Convexité	Courbe au-dessus de ses tangentes si f'' ≥ 0

COURS L'essentiel du cours

SCHEMA Plan complexe



Plan complexe

FORMULE

Dérivée en a

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} [f(a+h) - f(a)] / h$$

Taux accroissement limite finie

FORMULE

Dérivée composée

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Multiplier dérivées externe interne

FORMULE

Accroissements finis

$$\exists c \in]a;b[\; : \; f'(c) = [f(b)-f(a)] / (b-a)$$

Pente moyenne atteinte en c

METHODE Montrer qu'une équation f(x)=0 a une unique solution sur [a;b]

1. **Étape 1 – Continuité**
   Vérifier que f est continue sur [a;b] (polynôme, composée, etc.).
2. **Étape 2 – Monotonie**
   Calculer f' et montrer qu'elle est strictement positive ou négative sur]a;b[.
3. **Étape 3 – TVI + unicité**
   Vérifier $f(a)\cdot f(b) < 0$ et conclure par le corollaire du TVI.

EXEMPLE Exemple resolu — BAC Série C

ENONCE

Montrer que $f(x) = x^3 + x - 1$ admet une unique solution réelle α, puis encadrer α à 0,1 près.

RESOLUTION

f est continue sur ℝ (polynôme). $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ donc f strictement croissante. $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$, donc $\exists!\ \alpha \in]0;1[$ par le TVI. $f(0{,}6) \approx -0{,}18 < 0$ et $f(0{,}7) \approx 0{,}04 > 0$, donc $\alpha \in]0{,}6 ; 0{,}7[$.

EXERCICES Exercices d'application

1. Montrer que $g(x) = x^4 - 2x - 1$ admet au moins une racine dans]1;2[.
   3 pts
2. $f(x) = |x-2|$ est-elle dérivable en $x = 2$? Justifier.
   2 pts
3. Appliquer le théorème de Rolle à $f(x) = x^2-3x+2$ sur [1;2].
   3 pts

ASTUCES Astuces et pieges

- Pour le TVI, toujours vérifier continuité AVANT de conclure à l'existence.
- ▲ Continuité n'implique PAS dérivabilité : $|x|$ est continu en 0 mais non dérivable.

★ A retenir absolument

- Dérivable en a $\Longrightarrow$ continu en a, mais la réciproque est FAUSSE.
- TVI corollaire : continuité + stricte monotonie $\Longrightarrow$ solution UNIQUE.
- $f''(x) > 0$ sur I $\Longrightarrow$ f convexe sur I (courbe au-dessus des tangentes).