

MATHÉMATIQUES

Theme 13 : étude de fonctions

OBJECTIFS

Ce que tu dois savoir faire

- ✓ Déterminer le domaine de définition d'une fonction
- ✓ Étudier les variations via la dérivée et dresser le tableau
- ✓ Calculer les limites et identifier les asymptotes
- ✓ Tracer la courbe avec asymptotes et points remarquables

VOCABULAIRE

Définitions clés**Asymptote verticale**Droite $x=a$ si $f(x) \rightarrow \pm\infty$ quand $x \rightarrow a$ **Asymptote oblique**Droite $y=ax+b$ si $f(x)-(ax+b) \rightarrow 0$ en $\pm\infty$ **Extremum local**Point où f' s'annule en changeant de signe

COURS

L'essentiel du cours

FORMULE

Asymptote oblique

$$a = \lim f(x)/x, \quad b = \lim(f(x)-ax) \text{ en } \pm\infty$$

Division euclidienne si rationnel

FORMULE

Signe de f' et variations

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ croissante} ; \quad f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ décroissante}$$

Tableau de signes indispensable

FORMULE

Position courbe/asymptote

$$\text{Signe de } f(x)-(ax+b) : >0 \text{ au-dessus, } <0 \text{ en dessous}$$

Calculer après division

1 Phase 1 – Domaine et limites

Trouver Df (dénominateur $\neq 0$, $\ln > 0$, $\sqrt{\geq 0}$), puis calculer les limites aux bornes pour identifier asymptotes verticales et horizontales/obliques.

2 Phase 2 – Dérivée et variations

Calculer f' , factoriser, dresser le tableau de signes pour déterminer les intervalles de croissance et les extremums.

3 Phase 3 – Tableau de variations et tracé

Compléter le tableau avec les valeurs remarquables, puis tracer la courbe en plaçant asymptotes et points clés.

EXEMPLE

Exemple résolu — BAC Série C

ENONCE

Soit $f(x) = (x^2+x-1)/(x-1)$. Déterminer Df, les asymptotes et le sens de variation.

RESOLUTION

Df = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Division : $f(x) = x+2 + 1/(x-1) \rightarrow$ asymptote oblique $y=x+2$ et verticale $x=1$. $f'(x) = 1 - 1/(x-1)^2 = (x^2-2x)/(x-1)^2$.

Racines : $x=0$ et $x=2$. f décroissante sur $]-\infty; 0]$, $[0; 1[$ et $]1; 2]$, croissante sur $[2; +\infty[$.

EXERCICES

Exercices d'application

1 Déterminer Df et les asymptotes de $f(x) = \ln(x-1)/(x-2)$

4 pts

2 Étudier le signe de $f'(x) = e^{-x}(-x^2+3x-1)$ et dresser le tableau de variations

4 pts

3 Montrer que $y=x+1$ est asymptote oblique de $f(x)=(x^2+2x-1)/(x+1)$ et préciser la position

4 pts

ASTUCES

Astuces et pièges

- Pour une fraction rationnelle, faire la division euclidienne pour trouver l'asymptote oblique directement.
- ▲ Ne pas oublier de vérifier si la courbe coupe son asymptote oblique ($f(x)=ax+b$ peut avoir une solution).

★ **À retenir absolument**

- Toujours vérifier dénominateur, ln et racine carrée pour trouver Df
- e^x est toujours > 0 : le signe de f' dépend uniquement du reste
- Position relative : calculer le signe de $f(x)-(ax+b)$ après avoir trouvé l'asymptote