MATHÉMATIQUES

Theme 14 : Encadrements et approximations

OBJECTIFS — Ce que tu dois savoir faire

- ✓ Encadrer une expression à partir des encadrements de ses composantes
- ✓ Utiliser l'IAF pour majorer l'erreur d'approximation
- ✓ Appliquer la méthode de dichotomie pour approcher une racine
- ✓ Calculer une approximation affine via le développement limité d'ordre 1

VOCABULAIRE — Définitions clés

Encadrement	$a \leq \alpha \leq b$; précision égale à $b - a$
Suites adjacentes	L'une croît, l'autre décroît, même limite ℓ
Dichotomie	Bisection successive d'un intervalle contenant une racine

COURS — L'essentiel du cours

FORMULE

Inégalité des accroissements finis

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|$$

$M = \max |f'|$ sur $[a,b]$

FORMULE

Développement limité ordre 1

$$f(a+h) \approx f(a) + h \cdot f'(a)$$

Valable pour h petit

FORMULE

Nombre d'itérations dichotomie

$$n > \log_2((b-a)/\varepsilon)$$

ε = précision souhaitée

MÉTHODE Encadrer une expression composée

1. **Étape 1 – Identifier**
   Repérer chaque quantité et son encadrement connu.
2. **Étape 2 – Opérer**
   Appliquer les règles : addition borne à borne, inverse avec inversion des inégalités.
3. **Étape 3 – Vérifier**
   Contrôler le sens des inégalités, notamment pour soustraction et inverse.

EXEMPLE Exemple résolu — BAC Série C

ENONCE

On sait que $1{,}4 \leq \sqrt{2} \leq 1{,}5$ et $1{,}7 \leq \sqrt{3} \leq 1{,}8$. Encadrer $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ et $1/\sqrt{2}$.

RESOLUTION

Produit (termes positifs) : $1{,}4\times1{,}7 \leq \sqrt{6} \leq 1{,}5\times1{,}8 \to 2{,}38 \leq \sqrt{6} \leq 2{,}70$. Inverse (ordre inversé) : $1/1{,}5 \leq 1/\sqrt{2} \leq 1/1{,}4 \to 0{,}667 \leq 1/\sqrt{2} \leq 0{,}714$. Précision du second encadrement : $0{,}714 - 0{,}667 = 0{,}047$. DL ordre 1 : $\sqrt{(1+h)} \approx 1+h/2$, donc $\sqrt{1{,}02} \approx 1{,}01$ (erreur $< 10^{-4}$).

EXERCICES Exercices d'application

1. Sachant $2{,}2 \leq \sqrt{5} \leq 2{,}3$, encadrer $\sqrt{5} - 1$ et $1/\sqrt{5}$ à 10^{-1} près.
   3 pts
2. Approcher par dichotomie la racine de $x^3 - 2 = 0$ sur $[1;2]$ à 10^{-2} près.
   4 pts
3. Utiliser l'IAF avec $f(x)=\cos x$ sur $[0;\pi/6]$ pour majorer $|\cos(0{,}1) - 1|$.
   3 pts

ASTUCES Astuces et pièges

- Pour $1/x$, penser à inverser les bornes ET les inégalités (la borne haute devient basse).
- ▲ Soustraction : $a-d \leq x-y \leq b-c$, ne pas soustraire borne haute à borne haute.

★ À retenir absolument

- Inverse et multiplication par négatif : l'ordre des inégalités s'inverse.
- Deux suites adjacentes convergent vers la même limite ℓ avec $u_n \leq \ell \leq v_n$.
- IAF : $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$ permet de majorer l'erreur sur une approximation.