MATHÉMATIQUES

# Theme 16 : équations differentielles

## OBJECTIFS — Ce que tu dois savoir faire

- ✓ Identifier et classer une équation différentielle par son ordre
- ✓ Résoudre y' = ay et y' = ay + b avec conditions initiales
- ✓ Résoudre $y'' + \omega^2 y = 0$ et exprimer la solution en forme trigonométrique
- ✓ Appliquer les équations différentielles à des problèmes physiques simples

## VOCABULAIRE — Définitions clés

| | |
|---|---|
| **Équation différentielle** | Équation dont l'inconnue est une fonction et ses dérivées |
| **Solution générale** | Ensemble de toutes les solutions avec constante arbitraire C |
| **Solution particulière** | Solution unique obtenue via une condition initiale donnée |

## COURS — L'essentiel du cours

FORMULE

**y' = ay**

$$y(x) = C \cdot e^{ax}, \ C \in \mathbb{R}$$

*Solution exponentielle, C par CI*

FORMULE

**y' = ay + b**

$$y(x) = C \cdot e^{ax} - b/a, \ a \neq 0$$

*Homogène plus particulière constante*

FORMULE

**$y'' + \omega^2 y = 0$**

$$y(x) = A \cdot \cos(\omega x) + B \cdot \sin(\omega x)$$

*Deux conditions initiales nécessaires*

## MÉTHODE Résoudre y' = ay + b avec condition initiale

1. **Étape 1 — Homogène**
   Résoudre $y' = ay$ pour obtenir $y_h = C \cdot e^{ax}$.
2. **Étape 2 — Particulière**
   Chercher une solution constante $y_p = -b/a$ (vérifier en substituant).
3. **Étape 3 — Condition initiale**
   Écrire $y = y_h + y_p$, remplacer $x_0$ et $y_0$ pour déterminer C.

## EXEMPLE Exemple résolu — BAC Série C

**ENONCE**

Résoudre $y' = -2y + 6$ avec $y(0) = 1$. Donner la solution particulière.

**RESOLUTION**

Homogène : $y_h = C \cdot e^{(-2x)}$ | Particulière : $y_p = 3$ (car $-2\times3+6=0$ ✓) | Solution générale : $y = C \cdot e^{(-2x)} + 3$ | CI : $y(0)=1 \Longrightarrow C+3=1 \Longrightarrow C=-2$, donc $y(x) = -2e^{(-2x)} + 3$

## EXERCICES Exercices d'application

1. Résoudre $y' = 5y$ avec $y(0) = 2$. Donner $y(x)$.
   3 pts
2. Résoudre $y'' + 9y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$. Donner A et B.
   4 pts
3. Résoudre $y' = 3y - 9$ avec $y(0) = 4$. Donner la solution particulière.
   3 pts

## ASTUCES Astuces et pièges

- Pour $y'' + \omega^2 y = 0$, identifier $\omega = \sqrt{\text{(coefficient de y)}}$ avant d'écrire la solution.
- ▲ Piège : oublier le signe dans $y_p = -b/a$ pour $y' = ay + b$ (b et a peuvent être négatifs).

### ★ À retenir absolument

- $y' = ay \Longrightarrow y = Ce^{ax}$ ; $y' = ay+b \Longrightarrow y = Ce^{ax} - b/a$
- $y'' + \omega^2 y = 0 \Longrightarrow y = A\cdot\cos(\omega x) + B\cdot\sin(\omega x)$, deux constantes, deux conditions
- La solution générale = solution homogène + solution particulière