MATHÉMATIQUES

Theme 17 : Probabilites

OBJECTIFS — Ce que tu dois savoir faire

- Calculer une probabilité conditionnelle à partir d'une intersection
- Appliquer la formule des probabilités totales sur un arbre pondéré
- Vérifier l'indépendance de deux événements via $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$
- Utiliser la formule de Bayes pour remonter à une cause

VOCABULAIRE — Définitions clés

Probabilité conditionnelle	$P(A\|B)$ = probabilité de A sachant que B est réalisé
Indépendance	A et B indépendants si $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$
Système complet	Partition de Ω : événements incompatibles de réunion Ω

COURS — L'essentiel du cours

FORMULE

Probabilité conditionnelle

$$P(A|B) = P(A\cap B) / P(B)$$

P(B) > 0 requis

FORMULE

Probabilités totales

$$P(B) = \Sigma\, P(B|A_i)\cdot P(A_i)$$

Décomposer selon partition

FORMULE

Formule de Bayes

$$P(A_i|B) = P(B|A_i)\cdot P(A_i) / P(B)$$

Remonter à la cause

MÉTHODE Résoudre un problème avec arbre pondéré

1. **Étape 1 – Construire l'arbre**
   Placer les causes (système complet) au 1er niveau avec leurs probabilités.
2. **Étape 2 – Probabilités totales**
   Calculer P(B) en multipliant les branches et en sommant les chemins favorables.
3. **Étape 3 – Bayes si remontée**
   Diviser le chemin voulu $P(A_i \cap B)$ par P(B) pour obtenir $P(A_i|B)$.

EXEMPLE Exemple résolu — BAC Série C

ENONCE

Une usine a 2 machines : M_1 produit 60% des pièces (1% défaut), M_2 produit 40% (3% défaut). On tire une pièce au hasard.

RESOLUTION

$P(D) = P(D|M_1)\cdot P(M_1) + P(D|M_2)\cdot P(M_2) = 0{,}01\times0{,}6 + 0{,}03\times0{,}4 = 0{,}006 + 0{,}012 = 0{,}018$. $P(M_2|D) = (0{,}03\times0{,}4)/0{,}018 = 0{,}012/0{,}018 \approx 0{,}667$.

EXERCICES Exercices d'application

1. $P(A)=0{,}4$; $P(B)=0{,}5$; $P(A\cap B)=0{,}2$ — Calculer $P(A|B)$ et vérifier l'indépendance.
   3 pts
2. 3 machines (40%,35%,25%), défauts (2%,4%,3%) — Calculer P(défaut) par probabilités totales.
   4 pts
3. Avec l'exercice précédent, calculer $P(M_2|\text{défaut})$ par la formule de Bayes.
   3 pts

ASTUCES Astuces et pièges

- Sur un arbre, la probabilité d'un chemin = produit de toutes ses branches.
- ▲ Incompatibles ≠ indépendants : deux événements incompatibles non nuls ne sont JAMAIS indépendants.

★ À retenir absolument

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$: toujours penser à l'événement contraire pour simplifier.
- Formule produit : $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)$ — clé pour tout calcul conjoint.
- Bayes = probabilités totales au dénominateur : ne jamais oublier de calculer P(B) d'abord.