MATHÉMATIQUES

Theme 3 : géométrie plane

OBJECTIFS — Ce que tu dois savoir faire

- Maîtriser les angles orientés et la relation de Chasles
- Appliquer les formules de trigonométrie (addition, duplication, linéarisation)
- Résoudre des équations trigonométriques dans ℝ ou sur un intervalle
- Transformer des expressions trigonométriques (somme en produit)

VOCABULAIRE — Définitions clés

Angle orienté ($\vec{u}$, $\vec{v}$)	Mesure de la rotation de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$, définie modulo 2π
Sens positif	Sens anti-horaire, sens inverse des aiguilles d'une montre
Angle supplémentaire	Deux angles dont la somme vaut π

COURS — L'essentiel du cours

FORMULE

Chasles angles

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) \ [2\pi]$$

Passage par vecteur intermédiaire

FORMULE

Addition cos/sin

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \ | \ \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

COS-COS-SIN-SIN, alterner pour sin

FORMULE

Duplication & linéarisation

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \ | \ \cos^2 a = (1+\cos 2a)/2 \ | \ \sin^2 a = (1-\cos 2a)/2$$

Utile pour primitives et simplification

MÉTHODE Résoudre une équation trigonométrique

1. **Étape 1 – Simplifier**
   Réduire l'équation à une forme $\cos x = k$, $\sin x = k$ ou $\tan x = k$ (factoriser ou poser $t = \sin x$).
2. **Étape 2 – Identifier la valeur remarquable**
   Reconnaître l'angle a tel que $\cos a = k$ (ou sin/tan), puis écrire les deux familles de solutions.
3. **Étape 3 – Écrire les solutions**
   $\cos x = \cos a \Longrightarrow x = \pm a + 2k\pi$; $\sin x = \sin a \Longrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

EXEMPLE Exemple résolu — BAC Série C

ENONCE

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$. Donner les solutions sur $[0 ; 2\pi[$.

RESOLUTION

Poser $t = \sin x$: $2t^2 - t - 1 = 0$; $\Delta = 9$; $t = 1$ ou $t = -1/2$. Si $\sin x = 1$: $x = \pi/2 + 2k\pi \to$ sur $[0;2\pi[$: $x = \pi/2$. Si $\sin x = -1/2$: $x = -\pi/6 + 2k\pi$ ou $x = 7\pi/6 + 2k\pi \to$ sur $[0;2\pi[$: $x = 7\pi/6$ et $x = 11\pi/6$. Solutions : $\{\pi/2 ; 7\pi/6 ; 11\pi/6\}$.

EXERCICES Exercices d'application

1. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$: $\cos x = -\sqrt{2}/2$. (Donner toutes les solutions.)
   3 pts
2. Calculer $\sin 75°$ en utilisant $\sin(45° + 30°)$ et les valeurs exactes connues.
   3 pts
3. Linéariser $\cos^2 x \cdot \sin^2 x$ et en déduire une forme sans puissance.
   4 pts

ASTUCES Astuces et pièges

- Pour $\sin p + \sin q$, factoriser avec $2\sin((p+q)/2)\cdot\cos((p-q)/2)$ pour simplifier.
- ▲ $\sin x = \sin a$ ne donne PAS seulement $x = a$: ne pas oublier $x = \pi - a + 2k\pi$!

★ À retenir absolument

- Les angles orientés sont définis modulo 2π ; $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$.
- cos(a+b) : COS-COS−SIN-SIN ; sin(a+b) : SIN-COS+COS-SIN.
- Équation en sin : 2 familles (a et $\pi - a$) ; en cos : 2 familles ($+a$ et $-a$) ; en tan : 1 famille.