MATHÉMATIQUES

Theme 4 : géométrie dans l'espace

OBJECTIFS — Ce que tu dois savoir faire

- Maîtriser les vecteurs de l'espace et leurs opérations en coordonnées
- Déterminer les positions relatives de droites et de plans dans l'espace
- Calculer le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs
- Trouver les équations d'une droite ou d'un plan et résoudre des problèmes géométriques

VOCABULAIRE — Définitions clés

Vecteur normal	Vecteur orthogonal à tous les vecteurs d'un plan
Base orthonormée	Trois vecteurs unitaires, orthogonaux deux à deux, directs
Vecteurs coplanaires	Trois vecteurs dont le déterminant est nul

COURS — L'essentiel du cours

FORMULE

Norme d'un vecteur

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)}$$

Toujours positive ou nulle

FORMULE

Équation d'un plan

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ avec } \vec{n}=(a;b;c) \text{ normal}$$

$\vec{n}$ perpendiculaire au plan

FORMULE

Produit scalaire

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz' = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\,\theta$$

Nul si vecteurs orthogonaux

MÉTHODE Trouver l'équation d'un plan passant par 3 points

1. **Étape 1 – Vecteurs du plan**
   Calculer deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ à partir des trois points A, B, C donnés.
2. **Étape 2 – Vecteur normal**
   Calculer $\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$ (produit vectoriel) pour obtenir (a; b; c).
3. **Étape 3 – Équation du plan**
   Écrire $ax + by + cz + d = 0$ et trouver d en substituant les coordonnées de A.

EXEMPLE Exemple résolu — BAC Série C

ENONCE

Trouver l'équation du plan passant par A(1;0;0), B(0;2;0) et C(0;0;3).

RESOLUTION

$\vec{AB}=(-1;2;0)$, $\vec{AC}=(-1;0;3)$. $\vec{n}=\vec{AB}\wedge\vec{AC}=(6;3;2)$. Plan : $6x+3y+2z+d=0$. En A : $6(1)+0+0+d=0 \Longrightarrow d=-6$. Équation : $6x+3y+2z-6=0$.

EXERCICES Exercices d'application

1. Calculer la norme du vecteur $\vec{u}=(2; -3; 6)$.
   2 pts
2. Montrer que $\vec{u}=(1;2;3)$, $\vec{v}=(1;0;-1)$, $\vec{w}=(2;2;2)$ sont coplanaires.
   3 pts
3. Déterminer les équations paramétriques de la droite passant par A(1;2;-1) de vecteur directeur $\vec{u}=(3;0;-2)$.
   3 pts

ASTUCES Astuces et pièges

- Pour vérifier qu'un point appartient à une droite, substituer ses coordonnées dans les équations paramétriques.
- ▲ Ne pas confondre vecteur normal au plan $\vec{n}=(a;b;c)$ et vecteur directeur de la droite : ils sont perpendiculaires.

★ À retenir absolument

- Deux droites sont coplanaires si leurs vecteurs directeurs et le vecteur joignant leurs points sont coplanaires.
- Le produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$ donne un vecteur perpendiculaire aux deux vecteurs simultanément.
- Déterminant nul $\Longleftrightarrow$ vecteurs coplanaires $\Longleftrightarrow$ famille liée dans l'espace.