MATHÉMATIQUES

Theme 5 : Suites numériques

OBJECTIFS — Ce que tu dois savoir faire

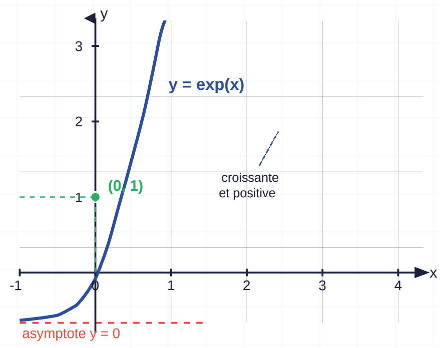
- ✓ Identifier et calculer le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique
- ✓ Appliquer le raisonnement par récurrence pour démontrer une propriété
- ✓ Calculer la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique ou géométrique
- ✓ Déterminer le sens de variation et la limite d'une suite numérique

VOCABULAIRE — Definitions cles

Suite numérique	Fonction de ℕ dans ℝ associant à n un réel u_n
Suite arithmétique	Suite où $u_{n+1} - u_n = r$ (raison r constante)
Suite géométrique	Suite où $u_{n+1} / u_n = q$ (raison q constante)

COURS — L'essentiel du cours

SCHEMA — Fonction exponentielle



Fonction exponentielle

FORMULE

Terme général arithmétique

$$u_n = u_0 + n \cdot r$$

r = raison, n = rang

FORMULE

Terme général géométrique

$$u_n = u_0 \cdot q^n$$

q = raison, $q \neq 0$

FORMULE

Sommes des termes

$$S_{arith} = n\cdot(u_1+u_n)/2 \mid S_{géo} = u_1\cdot(1-q^n)/(1-q)$$

$q \neq 1$ pour géométrique

METHODE Déterminer le sens de variation d'une suite

1. **Étape 1 – Différence**
   Calculer $u_{n+1} - u_n$ et étudier son signe (positif $\Longrightarrow$ croissante, négatif $\Longrightarrow$ décroissante).
2. **Étape 2 – Quotient**
   Si les termes sont strictement positifs, calculer u_{n+1}/u_n et comparer à 1.
3. **Étape 3 – Fonction associée**
   Poser $f(x) = u_n$ avec $n=x$, étudier les variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

EXEMPLE Exemple resolu — BAC Série C Niger 2019

ENONCE

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_1 = 5$ et $u_4 = 14$. Calculer la raison r, u_{10} et la somme $S = u_1 + u_2 + ... + u_{10}$.

RESOLUTION

$r = (u_4 - u_1)/(4-1) = (14-5)/3 = 3 \mid u_{10} = u_1 + 9r = 5 + 27 = 32 \mid S = 10\cdot(u_1+u_{10})/2 = 10\cdot(5+32)/2 = 185$

EXERCICES Exercices d'application

1. Soit $u_n = 2\cdot 3^n$. Calculer u_0, u_3 et la somme des 5 premiers termes.
   3 pts
2. Montrer par récurrence que $u_n = n^2+n$ est pair pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   4 pts
3. Une suite géométrique a $u_1 = 4$ et $q = 1/2$. Calculer sa limite quand $n \to +\infty$.
   3 pts

ASTUCES Astuces et pieges

- Pour identifier le type de suite, tester d'abord la différence puis le quotient entre deux termes consécutifs.
- ▲ ⚠️ La somme géométrique $S_{géo} = u_1\cdot(1-q^n)/(1-q)$ donne n termes seulement si on part de u_1 (pas u_0).

★ A retenir absolument

- Suite arithmétique : $u_n = u_0 + n \cdot r$ et $S_n = n \cdot (\text{premier}+\text{dernier})/2$
- Suite géométrique : $u_n = u_0 \cdot q^n$; si $|q| < 1$ alors $u_n \to 0$ quand $n \to +\infty$
- Récurrence : vérifier au rang 0 (initialisation) puis supposer vrai au rang n et démontrer au rang n+1