

## MATHÉMATIQUES

# Theme 8 : Arithmétique

## OBJECTIFS

## Ce que tu dois savoir faire

- ✓ Maîtriser la divisibilité et la division euclidienne dans  $\mathbb{Z}$
- ✓ Calculer le PGCD par l'algorithme d'Euclide et appliquer Bézout
- ✓ Utiliser les congruences pour calculer des restes rapidement
- ✓ Décomposer en facteurs premiers et appliquer le théorème de Fermat

## VOCABULAIRE

## Définitions clés

**Divisibilité** $a \mid b$  s'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $b = k \times a$ **Congruence** $a \equiv b [n]$  si  $n$  divise  $(a-b)$ **PGCD**Plus grand entier divisant à la fois  $a$  et  $b$ 

## COURS

## L'essentiel du cours

## FORMULE

**Division euclidienne**

$$a = bq + r, \text{ avec } 0 \leq r < b$$

*q quotient, r reste unique*

## FORMULE

**Identité de Bézout**

$$\exists u, v \in \mathbb{Z} : au + bv = \text{PGCD}(a, b)$$

*a, b premiers entre eux si =1*

## FORMULE

**Petit théorème de Fermat**

$$\text{Si } p \text{ premier et } p \nmid a, \text{ alors } a^{p-1} \equiv 1 [p]$$

*Utile pour grands exposants*

**1 Étape 1 – Diviser**

Effectuer la division euclidienne :  $a = bq_1 + r_1$ .

**2 Étape 2 – Itérer**

Remplacer  $a$  par  $b$  et  $b$  par  $r_1$ , répéter jusqu'à  $r = 0$ .

**3 Étape 3 – Conclure**

Le dernier reste non nul est le PGCD( $a, b$ ).

## EXEMPLE

**Exemple résolu — BAC Série C Niger****ENONCE**

Calculer PGCD(252, 168), puis trouver  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $252u + 168v = \text{PGCD}(252, 168)$ .

**RESOLUTION**

$252 = 168 \times 1 + 84 \rightarrow 168 = 84 \times 2 + 0 \rightarrow \text{PGCD} = 84$ . Remontée :  $84 = 252 \times 1 + 168 \times (-1)$ . Donc  $u=1, v=-1$ . Vérif :  $252 - 168 = 84$

✓

## EXERCICES

**Exercices d'application**

**1** Effectuer la division euclidienne de 2023 par 17 et conclure sur la divisibilité.

3 pts

**2** Calculer PGCD(360, 252) puis PPCM(360, 252) en utilisant l'algorithme d'Euclide.

4 pts

**3** Calculer  $7^{100} \pmod{11}$  en utilisant le petit théorème de Fermat.

3 pts

## ASTUCES

**Astuces et pièges**

- Pour les congruences, remplacer un grand nombre par son reste simplifie tous les calculs.
- $\text{PPCM}(a,b) = (a \times b) / \text{PGCD}(a,b)$  : toujours calculer le PGCD en premier.
- ▲ Dans  $a = bq+r$ , le reste  $r$  doit être positif même si  $a$  est négatif :  $-23 = 7 \times (-4) + 5$ ,  $r=5$  et non  $-2$ .

**★ À retenir absolument**

- $a | b \Leftrightarrow$  reste de la division de  $b$  par  $a$  est 0.
- $\text{PGCD}(a,b)=1 \Leftrightarrow a$  et  $b$  premiers entre eux  $\Leftrightarrow$  identité de Bézout avec second membre 1.
- Tout entier  $n > 1$  se décompose de façon unique en produit de facteurs premiers.