MATHÉMATIQUES

Theme 9 : Nombres complexes

OBJECTIFS Ce que tu dois savoir faire

- Maîtriser la forme algébrique et les opérations sur les nombres complexes
- Calculer le module et l'argument d'un nombre complexe
- Utiliser la formule de Moivre et trouver les racines n-ièmes
- Appliquer les nombres complexes aux transformations géométriques du plan

VOCABULAIRE Définitions clés

Nombre complexe	$z = a + bi$ avec a, b réels et $i^2 = -1$
Module	$\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$, distance de z à l'origine
Argument	$\arg(z) = \theta$ tel que $z = \|z\|(\cos\theta + i \sin\theta)$

COURS L'essentiel du cours

FORMULE

Forme trigonométrique

$$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) \text{ avec } r = |z|,\ \theta = \arg(z)$$

$r \geq 0$, θ défini modulo 2π

FORMULE

Formule de Moivre

$$[r(\cos\theta + i \sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

Puissance et racines complexes

FORMULE

Formules d'Euler

$$\cos\theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2 \ ; \ \sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$$

Utile pour linéarisation

MÉTHODE Mettre z sous forme trigonométrique

1. **Étape 1 – Module**
   Calculer $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. **Étape 2 – Argument**
   Trouver θ tel que $\cos\theta = a/r$ et $\sin\theta = b/r$ simultanément.
3. **Étape 3 – Écriture**
   Conclure $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta \in]-\pi ; \pi]$.

EXEMPLE Exemple résolu — BAC Série C

ENONCE

Écrire $z = 1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique, puis calculer z^6.

RESOLUTION

$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$; $\cos\theta = 1/2$ et $\sin\theta = \sqrt{3}/2$ donc $\theta = \pi/3$. $z = 2(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3)$. Par Moivre : $z^6 = 2^6(\cos 6\pi/3 + i \sin 6\pi/3) = 64(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 64$.

EXERCICES Exercices d'application

1. Calculer $(2 + 3i)(1 - i)$ et donner la forme algébrique.
   3 pts
2. Trouver les racines cubiques de 8, c'est-à-dire les z tels que $z^3 = 8$.
   4 pts
3. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z - 1| = |z + i|$.
   3 pts

ASTUCES Astuces et pièges

- Puissances de i : cycle de 4 ($i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$) → calculer n mod 4.
- Pour diviser, toujours multiplier par le conjugué du dénominateur.
- ▲ L'argument dépend du signe de $\cos\theta$ ET $\sin\theta$: ne pas utiliser arctan seul.

★ À retenir absolument

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ — toujours réel positif, clé de la division.
- Les n racines n-ièmes de $r_0e^{i\theta}$ sont $z_k = \sqrt[n]{r_0} \cdot e^{i(\theta+2k\pi)/n}$ pour $k = 0, \dots, n-1$.
- Affixe du milieu de AB : $z_M = (z_A + z_B)/2$ — lien géométrie-complexes.