

UNIVERSITE ABDOU MOUMOUNI	SUJET DE : Mathématiques	
<u>Service des Examens du Baccalauréat</u>	SERIE : C, E	
Année 2016	Coefficient : 6	Durée : 4 heures

EXERCICE 1 : (3 points)

Soit b un entier naturel donné strictement supérieur à 1. On rappelle que $b^2 - 1 = (b + 1)(b - 1)$.

- 1) Quel est le plus grand diviseur commun de b^2 et $b - 1$? (1 point)
- 2) Quel est l'ensemble des solutions appartenant à \mathbb{Z}^2 de l'équation : $b^2x + (b - 1)y = 1$? (1,5 point)
- 3) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $9x + 2y = 1$. (0,5 point)

EXERCICE 2 : (5 points)

Soit \mathcal{P} le plan affine euclidien rapporté à un repère (O, \vec{u}, \vec{v}) . Si A et B sont deux points de \mathcal{P} , on notera $d(A, B)$ la distance euclidienne de ces deux points.

Soit (Γ) l'ensemble des points M de \mathcal{P} vérifiant la condition : $d(M, F) + d(M, F') = 4$ où F désigne le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$ et F' le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, -2)$.

- 1) Vérifier que (Γ) contient les points A, B, C, D et E de coordonnées respectives :

$$(\frac{1}{2}, -3); (\frac{1}{2}, 1); (-1, -2); (-1, 0) \text{ et } (2, 0). \quad (0,5 \text{ point})$$

- 2) Quelle est la nature de (Γ) ? Montrer qu'une équation cartésienne de (Γ) dans le repère (O, \vec{u}, \vec{v})

est

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{3} + \frac{(y + 1)^2}{4} = 1. \quad (1,5 \text{ point})$$

- 3) a) Représenter la courbe (Γ) et les points A, B, C, D, et E. (1 point)

- b) Soit M_0 un point de \mathcal{P} de coordonnées (x_0, y_0) qui n'appartient ni à la droite (BC) ni à la tangente en B à (Γ) .

Déterminer les coordonnées du point P d'intersection des droites (DE) et (BM_0) ainsi que les coordonnées du point Q d'intersection des droites (AE) et (CM_0) . (1 point)

En déduire que le point M_0 appartient à (Γ) si et seulement si les points P et Q ont la même abscisse. (1 point)

PROBLEME : (12 points)

Le plan \mathcal{P} est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité : 2 cm). On donne le point A de coordonnées (1, 1).

- I- 1) α étant un réel donné non nul, soit \mathcal{D} la droite d'équation $x = \alpha$.

Montrer qu'il existe une application affine f_α de \mathcal{P} dans \mathcal{P} , et une seule, que l'on déterminera, qui satisfait aux deux conditions : $f_\alpha(O) = A$ et $\forall M \in \mathcal{D}, \overline{Mf_\alpha(M)} = \vec{i}$. (1,5 point)

- 2) On considère l'application affine f qui, au point M de coordonnées (x, y) de \mathcal{P} , fait correspondre le point M' de coordonnées (x', y') de \mathcal{P} telles que : $x' = x + 1$ et $y' = x + y + 1$.

Vérifier que $f = f_\alpha$ dans le cas $\alpha = -1$. Montrer que f est une bijection du plan. (0,5 point)

Y a-t-il des points invariants par f ? Quelle est la matrice de l'endomorphisme φ associé à f ? (0,5 point)

- 3) a) Vérifier que, quel que soit le réel λ , les vecteurs $\vec{i} + \lambda \vec{j}$ et $\varphi(\vec{i} + \lambda \vec{j})$ forment une famille libre. (0,5 point)
- b) Soit Δ une droite du plan \mathcal{P} ; donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit parallèle à son image $f(\Delta)$. (1 point)
- 4) Chercher l'image $f(\Delta)$ de la droite Δ dans chacun des cas suivants :
- a) Δ a pour équation $x = k$. (0,25 point)
- b) Δ a pour équation $y = k'$. (0,25 point)
- c) Δ a pour équation $y = tx$; calculer dans ce cas les coordonnées du point P d'intersection des droites Δ et $f(\Delta)$ en fonction de t . Quel est l'ensemble Π décrit par P lorsque t décrit \mathbb{R} ? (1 point)
- Tracer les droites Δ et $f(\Delta)$ dans le cas des droites Δ ayant respectivement pour équation :
 $x = 1$; $y = -1$; $y = -2x$. (0,75 point)
- 5) On pose $M_0 = O$, $M_1 = f(M_0)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = f(M_{n-1})$.
 Soit (x_n, y_n) les coordonnées de M_n .
- a) Exprimer x_n et y_n en fonction de x_{n-1} et y_{n-1} . En déduire x_n et y_n en fonction de n . (1 point)
- b) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, M_n appartient à la courbe (C) d'équation $y = \frac{x(x+1)}{2}$. (0,25 point)
- 6) Si une courbe Γ a pour équation $y = h(x)$, montrer que son image $f(\Gamma)$ a pour équation :
 $y = h(x-1) + x$. (0,25 point)
- Quelle est alors l'image de la courbe (C) du 5)? (0,25 point)

II- On considère l'application h_0 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $h_0(x) = e^{-x} - 1$; soit Γ_0 sa représentation graphique.

- 1) Montrer que son image $f(\Gamma_0)$ est la représentation graphique de l'application h_1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $h_1(x) = e^{1-x} - 1 + x$. (0,25 point)
- 2) a) Etudier les variations des applications h_0 et h_1 . (1,5 point)
- b) Représenter sur la même figure Γ_0 et $f(\Gamma_0)$ en dessinant soigneusement l'asymptote de chacune d'elles. (1,5 point)
- 3) λ étant un réel supérieur à 1, calculer en fonction de λ l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = 1$ et $x = \lambda$, la courbe $f(\Gamma_0)$ et son asymptote. (0,5 point)
- Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$. (0,25 point)