UNIVERSITE ABDOU MOUMOUNI	SUJET DE : Mathématiques
Service des Examens du Baccalauréat	SERIE : D
Année 2016	Coefficient : 5 Durée : 4 H

EXERCICE 1 : *(5 points)*

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère la transformation ponctuelle *F*, qui au point *M* d'affixe *z* associe le point *M'* d'affixe *z'* défini par :

$$z' = m^3 z + m(m+1), \qquad m \in \mathbb{C}^*$$

1) Donner la nature de la transformation *F*. (0,5 point)
2) On suppose $m = 1 + i$. Donner dans ce cas les éléments géométriques de *F*. (1,5point)
3) Déterminer l'ensemble des nombres complexes *m* pour lesquels *F* est une translation. (1,5 point)
4) Déterminer l'ensemble des nombres complexes *m* pour lesquels *F* est une homothétie de rapport 8. (1,5 point)

EXERCICE 2 : *(3 points)*

1) Linéariser l'expression $f(x) = \sin^3 x \cos x$ (2 points)
2) Chercher une primitive de $f(x) - \frac{1}{4}\sin 2x$. (1point)

PROBLEME : (12 points)

A) On considère l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = -3e^x$ (1) .

1) Déterminer le réel a pour que la fonction g définie sur IR par $g(x) = axe^x$ soit solution de l'équation différentielle *(1)*. (1point)
2) a) Démontrer qu'une fonction *h* deux fois dérivable sur *IR* est solution de *(1)* si et seulement si la fonction *h-g* est solution de l'équation différentielle

   $y'' + y' - 2y = 0$ (2) (0,5 point)

   b) Résoudre l'équation différentielle (2) (1 point)

   c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (1). (0,5point)

   d) Trouver la solution de (1) vérifiant les conditions *h(0)=1* et *h'(0)=0*. (0,5 point)

B) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. (Unité : 1 cm.)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(1-x)e^{x}$ et (C) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. (2,5points)
2) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x=-1$. (0,5point)
3) Tracer la courbe *(C)* dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (1,5 point)
4) a) Soit α un réel supérieur à 1. Calculer l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan comprise entre la courbe *(C),* l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$ (1 point)

   b) Calculer $\lim_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$. (0,5point)
5) a) Montrer que la restriction de f à $]-\infty,0]$ est une bijection de $]-\infty,0]$ sur un intervalle J que l'on précisera. (0,5point)

   b) Tracer la courbe représentative (Γ) de la réciproque de cette bijection sur le même graphique que (C) (1point)
6) Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du réel m, le nombre de points d'intersection de (C) avec la droite (Δ_m) d'équation $y=m$. (1 point)

UNIVERSITE ABDOU MOUMOUNI	SUJET DE : mathématiques	
Service des Examens du Baccalauréat	SERIE : D	
Année 2016	Coefficient : 5	Durée : 4 heures

EXERCICE 1 : *(4 points)*

1) Dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, soit P le polynôme en z suivant :

$$P(z) = z^3 + (-7 + 2i)z^2 + (15 - 4i)z - 25 + 10i.$$

Calculer $P(5 - 2i)$ et résoudre l'équation $P(z) = 0$. (1,5 points)

2) Soit S la similitude plane directe de centre I d'affixe $z_I = -3 - 2i$ et qui transforme le point A d'affixe $z_A = 1 + 2i$ en B d'affixe $z_B = 5 - 2i$.

a) Déterminer f, la transformation complexe associée à S. (0,5 point)

b) Déterminer les éléments caractéristiques de S. (1 point)

c) Soit (D) la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}(1, -2)$. Déterminer l'équation de la droite (D') image de la droite (D) par S. (1 point)

EXERCICE 2 : *(4 points)*

En 2004, la campagne électorale pour les élections municipales a fait rage dans un village du Niger. Deux groupes de listes A et B s'affrontent par joutes oratoires quotidiennes. Chaque jour de campagne on interroge un électeur pris au hasard et on définit les événements suivants :

A_n « l'électeur est favorable à la liste A au $n^{\text{ième}}$ jour de campagne »

B_n « l'électeur est favorable à la liste B au $n^{\text{ième}}$ jour de campagne »

On note p_n et q_n les probabilités respectives des événements A_n et B_n et on admet que chaque électeur ne se détermine que pour les listes A et B.

1) Donner une relation simple entre p_n et q_n. (0,25 point)

2) Les arguments des uns et des autres sont si convaincants et les électeurs sont si indécis qu'à l'issue de chaque jour de campagne, 20% des électeurs favorables à la liste A et 30% des électeurs favorables à la liste B changent d'avis pour le jour suivant.

a) Déterminer l'arbre des probabilités. (0,5 point)

b) Donner $P(A_{n+1}|A_n)$ et $P(A_{n+1}|B_n)$. (0,5 point)

c) Montrer que $P(A_{n+1} \cap A_n) = 0{,}8p_n$ et que $P(A_{n+1} \cap B_n) = 0{,}3q_n$.
En déduire que $P(A_{n+1}) = 0{,}8p_n + 0{,}3q_n$; puis que $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}3$. (1,25 points)

3) Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = p_n - 0{,}6$

a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. Quelle est sa limite ? (1 point)

b) En déduire la limite de la suite (p_n). (0,5 point)

PROBLEME : *(12 points)*

Partie A :

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction g_n définie sur $]1, +\infty[$ par :

$g_n(x) = -nx\ln x + 2 - x$.

1) Etudier le sens de variations de g_n sur $]1, +\infty[$. (1 point)

2) a) Montrer que l'équation $g_n(x) = 0$ admet sur $]1, +\infty[$ une unique solution α_n appartenant à $]1, 2[$. (0,5 point)

b) En déduire le signe de $g_n(x)$ sur $]1, +\infty[$. (0,5 point)

Partie B :

n étant un entier naturel non nul, on considère la fonction numérique f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x^n \ln x & si\ x \in \left]0,1\right] \\ f_n(x) = (2-x)^n \ln x & si\ x \in \left]1,+\infty\right[\\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

(ln désigne le logarithme népérien)

On note (C_n) la courbe représentative de f_n dans un repère orthogonal. (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées)

1- a) Etudier la continuité de f_n en $x_0 = 0$ et en $x_1 = 1$. (0,5 point)

b) Etudier la dérivabilité de f_n en $x_0 = 0$ et en donner une interprétation graphique. (0,75 point)

c) Montrer que f_n est dérivable en $x_1 = 1$ et déterminer une équation de la tangente (T) à (C_n) au point d'abscisse 1. (0,75 point)

2- Calculer suivant la parité de n, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$. (0,5 point)

3- a) Calculer $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]0, 1[$. (0,5 point)

b) Etudier le signe de $f_n'(x)$ sur l'intervalle $]0, 1[$. (0,5 point)

4- a) Montrer que : $\forall x \in \left]1,+\infty\right[,\ f_n'(x) = \dfrac{(2-x)^{n-1}}{x} \times g_n(x)$. (0,5 point)

b) Montrer que $f_n(\alpha_n) = \dfrac{(2-\alpha_n)^{n+1}}{n\alpha_n}$. (0,5 point)

5- On suppose désormais n pair.

a) Dresser le tableau de variation de f_n. (1,5 points)

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat. (1 point)

c) Construire (C_2). On prendra $\alpha_2 = 1{,}35$. (1,5 points)

6- Soit β un nombre réel de l'intervalle $]0, 1[$.

a) Déterminer A_β l'aire géométrique, en cm², du domaine limité par (C_2), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \beta$ et $x = 1$. (1 point)

b) Calculer $\lim\limits_{\beta\to 0} A_\beta$. (0,5 point)