UNIVERSITE ABDOU MOUMOUNI	**Épreuve de : Mathématiques**
Service des Examens du Baccalauréat	**SERIE : D**
Année : 2017	Coefficient : **5** Durée : **4 H**

EXERCICE 1 : (4 points)

On considère l'équation : (E) $z^3 - 9z^2 + (22+12i)z - 12 - 36i = 0$.

1) Démontrer que l'équation (E) admet une solution réelle z_1 et une solution imaginaire pure z_2. (1 point)
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). (0,5 point)
3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 3$, $z_B = 2i$ et $z_C = 6 - 2i$.
   a) Placer les points A, B, C dans le plan complexe. (0,5 point)
   b) Montrer que $\dfrac{z_c - z_A}{z_B - z_A}$ est réel. Que peut-on en déduire ? (0,75 point)
   c) Soit S la similitude directe plane d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$ transformant A en B.

      Donner l'écriture complexe de S et préciser son centre Ω. (1,25 point)

EXERCICE 2 : (4 points)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}$.

1) Calculer u_2 , u_3 et u_4 . (0,75 point)
2) On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n$.

   Montrer que la suite (v_n) vérifie pour tout entier naturel n ; $v_{n+2} = \dfrac{1}{2}(v_{n+1} + v_n)$ (1). (0,5 point)
3) On définit les suites (x_n) et (y_n) par $x_n = v_{n+1} - v_n$ et $y_n = v_{n+1} + \dfrac{1}{2}v_n$.
   a) Montrer que (x_n) est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{1}{2}$. (0,5 point)
   b) Montrer que (y_n) est une suite constante. (0,5 point)
   c) Vérifier que $v_n = \dfrac{2}{3}(y_n - x_n)$ puis en déduire l'expression de v_n en fonction de n. (0,75 point)
4) a) Montrer que $u_n = \left[e^{\frac{2}{3}\ln 2}\right]^{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ (0,5 point)

   b) En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite. (0,5 point)

PROBLEME (12 points)

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = 2x^2 + \ln x$.

1) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation. (1 point)
2) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution α sur $]0 ; +\infty[$. (0,5 point)

   b) Montrer que $0,548 < \alpha < 0,549$. (0,5 point)

3) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x. (0,5 point)

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=1-x+\dfrac{1+\ln x}{2x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ ayant comme unité graphique 4 cm.

1) a) Déterminer la limite de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu. (0,75 point)
   b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. (0,5 point)
   c) Montrer que la droite (D) d'équation $y=1-x$ est asymptote à (C). Etudier la position de (C) par rapport à l'asymptote (D). (0,75 point)

2) a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=\dfrac{-g(x)}{2x^2}$. (0,75 point)
   b) Dresser le tableau de variation de f. (0,75 point)

3) a) Montrer que $f(\alpha)=1-2\alpha+\dfrac{1}{2\alpha}$. (0,5 point)
   b) Donner alors un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près. (0,5 point),

4) a) Calculer les coordonnées du point de (C) où la tangente est parallèle à (D). Donner une équation de cette tangente T. (1 point)
   b) Tracer (C), (D) et T dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. (1,5 point)
   c) Soit λ un réel supérieur à $\dfrac{1}{e}$. Déterminer l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C), (D) et les droites d'équation $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=\lambda$. 4,5

   Calculer la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$. (1 point)