

**Exercice 1** (4 points)

On rapporte le plan  $P$  à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  et on considère l'application  $f$  de  $P$  dans  $P$  qui, au point  $M(x, y)$  associe le point  $M'(x', y')$  tel que:

$$\begin{cases} x' = 2y + 2 \\ y' = 2x - 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que l'application  $f$  admet un unique point invariant  $\Omega$  dont on précisera les coordonnées. (0,5 point)
- 2) Montrer que  $f$  est similitude dont on précisera le rapport. (1 point)
- 3) Soit  $H$  l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport 2 et  $M_1$  l'image de  $M$  par l'homothétie  $H$ . Montrer que le milieu de  $[M_1M']$  appartient à une droite fixe  $\Delta$  passant par  $\Omega$  et dont on donnera une équation cartésienne. (1 point)
- 4) Caractériser alors l'application  $f$ . (1,5 points)

**Exercice 2** (4 points)

Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par:  $u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

- 1) Prouver que la suite  $(u_n)$  est croissante. (1 point)
- 2) On définit une suite  $(v_n)$  sur  $\mathbb{N}^*$  par  $v_1 = 1$  et pour  $n \geq 2$ ,

$$v_n = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n}$$

- a) Montrer qu'il existe deux nombres réels  $A$  et  $B$  tels que pour tout  $n \geq 2$ :

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n} \quad (0,5 \text{ point})$$

- b) En déduire que, si  $n$  supérieur ou égal à 2 on a:  $v_n = 2 - \frac{1}{n}$  (1 point)
- c) Démontrer que pour tout  $n$  supérieur ou égal à 2:  $u_n \leq v_n$  (0,5 point)
- d) Que peut-on dire pour la convergence de la suite  $(u_n)$ ? (1 point)

**Problème** (12 points)

Partie A

Soit l'intégrale  $I_n$  définie par:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

- 1) Montrer en utilisant une intégration par partie, que:  $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$  (0,5 point)
- 2) Montrer que la suite  $(I_n)$  est une suite positive puis qu'elle est décroissante (sans calculer  $I_n$ ) (0,5 + 0,5 point)
- 3) En utilisant les questions précédentes, prouver que:

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1 \quad (0,5 \text{ point})$$

En déduire la limite de la suite  $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)$  (0,5 point)

- 4) On pose  $t_n = (n+1)I_{n+1}I_n$ .
  - a) Montrer que la suite  $(t_n)$  est une suite constante. (0,5 point)
  - b) En déduire que  $t_n = \frac{\pi}{2}$  pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ . (0,5 point)
- 5) On pose  $v_n = nI_n^2$ 
  - a) En écrivant  $v_n$  sous la forme  $\frac{n}{n+1} t_n \frac{I_n}{I_{n+1}}$ , déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ . (0,5 point)
  - b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} I_n$  (0,5 point)

### Partie B

- 1) Montrer que pour tout réel  $u > -n$ , on a  $\ln\left(1 + \frac{u}{n}\right) \leq \frac{u}{n}$  (0,5 point)
- 2) En déduire que pour tout réel  $u > -n$ ,  $\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq e^u$  (0,5 point)
- 3) Montrer que pour tout réel  $t \in [0, \sqrt{n}]$ ,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^n} \quad \text{puis que} \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \leq e^{-\frac{t^2}{2}} \leq \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

(0,5 + 0,5 point)

- 3) En déduire alors l'encadrement suivant

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} dt \quad (0,5 \text{ point})$$

### Partie C

Soit  $F$  une primitive de  $t \mapsto \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$  sur  $t \in [0, \sqrt{n}]$ . On pose  $\varphi : [0; \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\varphi(u) = \sqrt{n} \sin(u)$

- 1) Exprimer  $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} dt$  à l'aide de  $F$ . (0,5 point)
- 2) Justifier que  $F \circ \varphi$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$  et calculer sa dérivée. (0,25 + 0,25 point)
- 3) En déduire que  $\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} u du = F(\sqrt{n}) - F(0)$  (0,5 point)
- 4) Prouver alors que  $\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} dt = \sqrt{n} I_{n+1}$  (0,5 point)

#### Partie D

Soit  $G$  une primitive de  $t \mapsto \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}$  sur  $[0, \sqrt{n}]$ . On pose  $\theta : [0; \frac{\pi}{4}] \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\theta(u) = \sqrt{n} \tan(u)$$

- 1) Exprimer  $\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} dt$  à l'aide de  $G$ . (0,5 point)
- 2) Justifier que  $G \circ \theta$  est dérivable sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$  et calculer sa dérivée. (0,5 point)
- 3) En déduire que  $\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{n-2} u du = G(\sqrt{n}) - G(0)$  (0,5 point)
- 4) Prouver alors que  $\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}} dt \leq \sqrt{n} I_{n-2}$  (0,5 point)

#### Partie E

- 1) En déduire des questions précédentes que, pour tout entier naturel  $n \geq 2$

$$\sqrt{n} I_{n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq \sqrt{n} I_{n-2} \quad (0,5 \text{ point})$$

- 2) Calculer la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  (0,5 point)