

EXERCICE 1 (4 points)

1) Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation : $z^2 + 2z + 10 = 0$. (0,5 point)

2) Déterminer les nombres complexes u et v tels que :

$$\begin{cases} -2u + v = 1 + 13i \\ -u + v = 4 + 8i \end{cases} \quad (0,5 \text{ point})$$

3) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -1 + 3i$,

$$z_B = -1 - 3i, z_C = 3 - 5i \text{ et } z_D = 7 + 3i.$$

a) Placer les points A, B, C et D dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal

$(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ (unité 1 cm). (0,5 point)

b) Démontrer que le triangle (BAD) est rectangle en A, et le triangle (BCD) est rectangle en C. (1 point)

c) En déduire que les quatre points A, B, C, D sont sur un même cercle (Γ) dont on précisera le centre I et le rayon. Tracer (Γ) sur la figure. (1 point)

4) Démontrer que les points C' et D', images respectives des nombres conjugués de z_C et z_D , sont sur le cercle (Γ). (0,5 point)

EXERCICE 2 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n par :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}.$$

1) Démontrer par récurrence que $u_n - 1 > 0$. (1 point)

2) Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$. (1 point)

b) Pour tout nombre entier naturel n , exprimer v_n , puis u_n en fonction de n . (1,5 points)

c) En déduire la limite de la suite (u_n) . (0,5 point)

PROBLEME (12 points)

Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x.$$

On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

Partie A

- 1) a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$. En déduire que C admet une asymptote. Préciser la position de C par rapport à l'asymptote au voisinage de $-\infty$.
(0,5 + 0,5 + 0,5 points)
- b) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. (0,5 point)
- 2) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation. On calculera les valeurs exactes des extremums. (1 + 0,5 + 1 + 0,5 points)
- 3) Calculer les coordonnées des points d'intersection de C avec les axes de coordonnées. (1 point)
- 4) Soit T la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0. Déterminer le coefficient directeur de T.
(0,5 point)

- 5) Construire T et C. (0,5 + 1 points)

Partie B

- 1) Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 2e^x. \quad (1 \text{ point})$$

- 2) Soit F la fonction numérique définie sur IR par :

$$F(x) = 2e^x + 2f(x) - f'(x).$$

- a) Démontrer que F est une primitive de f . (0,5 point)

Calculer $F(x)$. (1 point)

- b) En déduire l'aire $A(\alpha)$ de la partie du plan, ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$\begin{cases} \alpha \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases} \quad (\alpha \text{ est un réel négatif}). \quad (1 \text{ point})$$

Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $-\infty$. (0,5 point)