Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation *Office du Baccalauréat du Niger (OBN)* *Etablissement Public à Caractère Administratif* **Année : 2021**	**SUJET DE : Mathématiques** **SERIES : C, E** **Coefficient : 6 Durée : 4H**

Exercice 1(*4,5 points*)

L'espace $\mathcal{E}$ étant rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\,;\vec{k})$. On considère l'application f de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 4 \\ z' = -z + 2 \end{cases}$$

1) Démontrer que f est une isométrie.**(0,5 point)**
2) a) Démontrer que pour tout point M d'image M' par f, le milieu I du bipoint (M, M') appartient à un plan fixe P.**(0,5 point)**
   b) Soit M_1, le symétrique orthogonal de M par rapport au plan P. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{M_1M'}$ est constant. **(0,5 point)**
   c) Déterminer l'expression analytique de $f o f$ et donner la nature de $f o f$. **(0,5 point)**
   d) En déduire que f peut s'écrire comme une composée de deux transformations simples que l'on précisera. **(0,5 point)**
3) Déterminer l'ensemble des points M d'image M' par f tel que :
   a) $OM = OM'$ **(0,5 point)**
   b) $MM' = a$ (a est un nombre réel positif).**(0,5 point)**
4) Déterminer le produit vectoriel $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{OM'}$. En déduire l'ensemble des points M tels que O, M, M' soient alignés.**(1 point)**

Exercice 2 (*4 points)*

1) On considère l'équation d'inconnue (n, m) où n et m sont des entiers relatifs :

   $$(1)\quad 13\,n - 24\,m = 1.$$

   a) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de cette équation. **(0,5 point)**

   b) Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation (1). **(0,5 point)**
2) On souhaite chercher le PGCD de $10^{13} - 1$ et $10^{24} - 1$.

   a) Justifier que 9 divise $10^{13} - 1$ et $10^{24} - 1$. **(0,5 point)**

   b) Soit (n, m) désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1) ; montrer que l'on peut écrire $(10^{13n} - 1) - 10(10^{24m} - 1) = 9$. **(0,5 point)**

   c) Montrer que $10^{13} - 1$ divise $10^{13n} - 1$. **(0,5 point)**

   Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers naturels N et M tels que $(10^{13} - 1)\,N - (10^{24} - 1)\,M = 9$. **(0,5 point)**

   d) Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{13} - 1$ divise 9. **(0,5 point)**

   Déduire des questions précédentes le PGCD de $10^{13} - 1$ et $10^{24} - 1$. **(0,5 point)**

Problème (*11,5 points*)

1) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. **(0,5 point)**

2) a) Déduisez-en que $\lim\limits_{x\to +\infty} [x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)] = 1$ **(0,5 point)**

b) Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto (1+\frac{1}{x})^x$. **(0,5 point)**

Partie A

Pour tout entier naturel n on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n = x^n(1-x)$.

1) a) Etudier le sensde variation de f_n.**(1,5 points)**

b) Prouver que selon la parité de n, l'équation $f_n(x) = 1$ ou bien aune solution et une seule sur $\mathbb{R}$, ou bien n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.**(0,5 point)**

Partie B

On note $g_n$la restriction de f_n à l'intervalle [0 ; 1].

Ainsi pour tout $x \in [0;1]g_n = x^n(1-x)$.

On note C_n la courbe représentative de $g_n$relativement au repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) Montrer que, sauf pour une valeur de n, g_n possède un maximum M_n et que $M_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$.**(1 point)**

2) Tracer C_0, C_1, C_2 dans le repère orthonormé $(O,\vec{\imath};\vec{\jmath})$. Donner l'allure de C_n pour $n>2$.
Placez C_{n+1} par rapport C_n (position relative des points de même abscisse et des deux points représentatifs de maximum) **(0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 points)**

3) Calculer successivement :

a. $\lim\limits_{n\to +\infty} M_n$ b. $I_n = \int_0^1 g_n(x)dx$ c. $\lim\limits_{n\to +\infty} I_n$**(0,5 + 0,5 + 0,5 points)**

Peut-on prévoir ce dernier ce dernier résultat à partir d'un encadrement de g_n ?**(0,5 point)**

4) Pour tout x de [0 ; 1] et pour tout entier naturel n on pose :

$S_n(x) = g_0(x) + g_1(x) + \ldots + g_n(x) = \sum_{i=0}^{n} g_i(x)$ et $J_n = \int_0^1 S_n(x)dx$.

a) Calculer $S_n(x)$ et sa limite $\lim\limits_{n\to +\infty} S_n(x)$ **(0,5 + 0,5 point)**

b) Calculer J_n et sa limite $\lim\limits_{n\to +\infty} J_n$.**(0,5 + 0,5 point)**

5) Exprimer J_n en fonction de $I_0, I_1, \ldots, I_n$. Déduisez-en la valeur de la somme : $s_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.**(0,5 point)**

6) Comparer $\lim\limits_{n\to +\infty} \int_0^1 S_n(x)\,dx$ et $\int_0^1 (\lim\limits_{n\to +\infty} S_n(x))\,dx$.**(0,25 + 0,25 point)**