Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche et de l'Innovation *Office du Baccalauréat des Equivalences et des Examens et Concours du Supérieur (OBEECS)* *Etablissement Public à Caractère Administratif* **Année : 2022**	**SUJET DE : Mathématiques** Epreuve du 1er groupe **SERIES : C, E** **Coefficient : 6** Durée : 4H

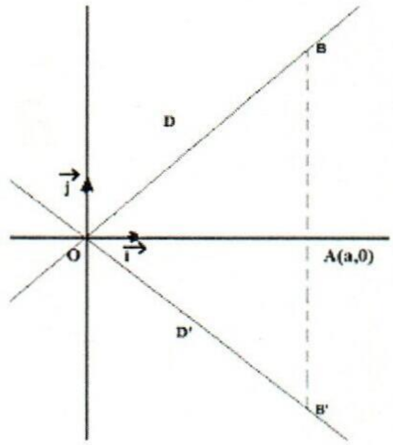
Exercice 1 (*5 points*)

1) Soit H l'hyperbole d'équation réduite dans le repère orthonormal R= $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sur la figure ci-contre, on a placé le sommet A(a,0) et tracé les asymptotes D et D'd'équations :

y = $\frac{b}{a}x$ et y = $-\frac{b}{a}x$.

On considère les vecteurs $\vec{I} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$ et $\vec{J} = a\vec{\imath} - b\vec{\jmath}$.



a) Montrer que $\vec{I}$ *et* $\vec{J}$ sont des vecteurs directeurs respectifs des asymptotes D et D'. **(0,5 + 0,5 point)**

b) Soit M un point quelconque du plan, de coordonnées (*x* ;*y*) dans le repère R et de coordonnées (*X*,*Y*) dans le repère R'= $(O, \vec{I}\,\vec{J})$

Prouver que les formules de changements de repère sont :

$$\begin{cases} x = a(X + Y) \\ y = b(X - Y) \end{cases}$$ **(1 point)**

c) Déduire du b) qu'une équation de H dans R' est $4XY = 1$. **(0,5 point)**

d) Prouver réciproquement, que si une courbe a pour équation $4XY = 1$ dans R' alors son équation réduite dans R est $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. **(0,5 point)**

2) ***Application*** : Soit l'hyperbole H d'équation $3x^2 - y^2 = 12$ dans un repère orthonormal R= $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

a) Placer les sommets A et A', les foyers F et F'. Tracer l'hyperbole H et ses deux asymptotes D et D'. **(1 point)**

b) Soit le repère R_1= $(O, \vec{I}, \vec{J})$ tel que $\vec{I} = \vec{\imath} + \sqrt{3}\,\vec{\jmath}$ et $\vec{J} = \vec{\imath} - \sqrt{3}\,\vec{\jmath}$.

Déterminer une équation de H dans le repère R_1. **(1 point)**

Exercice 2 *(5 points)*

Soit f une fonction définie sur $]0, +\infty[$, qui admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses $\frac{1}{e}$, $\sqrt{e}$ et dont la tangente au point d'abscisse e, a pour coefficient directeur 4.

On suppose que pour tout réel x, strictement positif on a :

$$f(x) = 2x(a\,(lnx)^2 + bln(x) + c)$$

1) Exprimer $f'(x)$ en fonction de a, b et c. **(0,5 point)**
2) En déduire pour tout réel x strictement positif, l'expression de $f(x)$. **(1 point)**
3) Calculer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.**(0,25 + 0,25 point)**
4) Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a :
   $f'(x) = 2\,(lnx + 1)(2lnx - 1)$. **(0,5 point)**
5) Dresser le tableau de variation de f. On calculera la valeur exacte de chaque extrémum de f. **(0,75 point)**
6) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note D_α la droite d'équation : $y = \alpha\, x$.
   a) Démontrer que la courbe représentative C de f et D_2 possède deux points d'intersection dont on calculera les abscisses. **(1 point)**
   b) Quel est le nombre d'éléments de $C \cap D_\alpha$ selon les valeurs de α. **(0,75 point).**

PROBLEME *(10 points)*

Le plan affine euclidien est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j}\,)$.

A) 1) a) On donne la droite D d'équation $y = -\,x\sqrt{3} + 2$. Exprimer, en fonction des coordonnées $(x\,;y)$ de M, les coordonnées de $S_D(M)$, où S_D désigne la symétrie orthogonale d'axe D. **(1 point)**

b) On appelle S la similitude de centre A (0 ; 2), d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\sqrt{3}$.

Déterminer les coordonnées de $S(M)$ en fonction de celles de M. **(1 point)**

c) Soit T l'application affine définie par $T = S \circ S_D$.

Montrer que les coordonnées de $T(M)$ sont données en fonction de celles de M par

(1) $$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}\,x - \frac{3}{2}\,y + 3 \\ y' = -\,\frac{3}{2}\,x - \frac{\sqrt{3}}{2}\,y + \sqrt{3} + 2 \end{cases}$$ **(1 point)**

d) A-t-on: $S \circ S_D = S_D \circ S$? **(0,5 point)**

2) On désigne par $h_{(A;\sqrt{3})}$ l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.

Montrer que $T = s_{D'} \circ h_{(A;\sqrt{3})} = h_{(A;\sqrt{3})} \circ s_{D'}$ où $s_{D'}$ est la symétrie orthogonale d'axe D' que l'on déterminera. **(1,5 point)**

3) L'application T est-elle bijective ? Déterminer T^{-1} en donnant les coordonnées de $T^{-1}(M)$ en fonction de celles de M. **(0,5 + 1 points)**

B) On considère la famille $\mathcal{D}$ de droites d'équation :

$$(m+1)\,x + (m-1)\,y + 2\,m = 0 \quad \text{où } m \text{ est un paramètre réel.}$$

1) Existe-t-il une droite de la famille $\mathcal{D}$ passant par $M(x_0\,;\,y_0)$? En déduire que $\mathcal{D}$ est l'ensemble des droites passant par un point B à déterminer, privé d'une droite que l'on appellera Δ. **(1,5 points)**

2) Déterminer $T(\mathcal{D})$ et vérifier que c'est l'ensemble des droites passant par $T(B)$ privé de la droite $T(\Delta)$. **(0,5 point)**

C) Si M et $T(M)$ ont respectivement pour coordonnées x et y, x' et y', on pose

$z = x + i\,y$ et $z' = x' + i\,y'$.

1) Exprimer z' en fonction de z, en utilisant le système (1). **(0,5 point)**

2) En déduire la nature de T et ses éléments caractéristiques. (on pourra utiliser la décomposition canonique de T). **(1 point)**