

**Exercice 1** (5 points)

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $R = (O; \vec{i}; \vec{j})$ . On considère l'ensemble  $(C_\alpha)$  des points  $M(x; y)$  tels que  $x^2 + y^2 + 2\alpha xy + 4x - \alpha^2 = 0$ .  
On considère le repère  $R_\theta = (O; \vec{u}; \vec{v})$  obtenu par rotation d'angle  $\theta$  et de centre  $O$ .  
On note  $(X; Y)$  les coordonnées de  $M$  dans le repère  $R_\theta$ .

1) Montrer que

$$\begin{cases} x = X \cos \theta - Y \sin \theta \\ y = X \sin \theta + Y \cos \theta \end{cases} \quad (0,5 \text{ point})$$

2) a) Donner l'équation de  $C_\alpha$  dans ce nouveau repère. (0,5 point)

b) Comment choisir  $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$  pour que le terme en  $XY$  de l'équation  $C_\alpha$  dans ce repère soit nul ? (0,5 point)

3) On suppose pour la suite que  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

a) Vérifier que dans le nouveau repère  $(C_\alpha)$  a pour équation.

$$(1 + \alpha)X^2 + (1 - \alpha)Y^2 + 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y - \alpha^2 = 0. \quad (0,5 \text{ point})$$

b) Déterminer, suivant les valeurs de  $\alpha$ , le type de  $(C_\alpha)$ . (1,5 point)

c) Dans le cas où  $(C_\alpha)$  est une parabole, déterminer le paramètre, le foyer et la directrice. (1 point)

d) Déterminer pour quelles valeurs de  $\alpha$  la conique  $(C_\alpha)$  est un cercle, dont on donnera le centre et le rayon. (0,5 point)

**Exercice 2** (4 points)

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $]0, +\infty[$ , et qui vérifie :

$$\forall x, y \in ]0; +\infty[, f(xy) = f(x) + f(y) \quad (1).$$

1) En utilisant la relation (1), montrer que  $f(1) = 0$ . (0,5 point)

2) Soit la fonction  $g$  défini sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = f(ax)$  où  $a$  est une constante pour la fonction  $g$ . calculer la fonction dérivée de  $g$  sans utiliser la relation (1). (0,75 point)

3) Soit la fonction  $h$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = f(a) + f(x)$  où  $a$  est une constante pour la fonction  $h$ . Calculer la fonction dérivée de  $h$  sans utiliser la relation (1). (0,75 point)

4) Dédire des questions 2) et 3) que si  $f$  vérifie la relation (1) on a :

$$\forall x, y \in ]0; +\infty[, a f'(ax) = f'(x). \quad (0,5 \text{ point})$$

5) En déduire que le nombre dérivé de  $f$  en  $a$  est  $f'(a) = \frac{f'(1)}{a}$ . (0,5 point)

6) Vérifier que la fonction logarithme népérien vérifie la relation (1) et préciser la valeur de  $f'(1)$  qui correspond à la fonction logarithme népérien. (0,5 + 0,5 point)

**Problème** (11 points)

Le plan affine P est rapporté au repère orthonormé cartésien  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . Le nombre  $\lambda$  étant un réel donné, on considère l'application  $f_\lambda$ , qui au point M de coordonnées  $(x; y)$ , fait correspondre le point M' de coordonnées  $(x'; y')$  telles que :

$$\begin{cases} x' = x + (\lambda - 1) y \\ y' = 2x + (\lambda - 2) y \end{cases}$$

**Partie A**

- 1) Déterminer les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles  $f_\lambda$  est bijective. **(0,5 point)**
- 2) Déterminer lorsqu'elle existe  $f_\lambda^{-1}$ , l'application réciproque de  $f_\lambda$ , en donnant les coordonnées de M en fonction de celles de M'. **(0,5 point)**
- 3) Existe-t-il des valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles  $f_\lambda$  est involutive ? **(0,5 point)**
- 4) Quelle est la nature géométrique de  $f_1$  ? **(1 point)**

**Partie B**

Dans cette question on étudie  $f_0$ .

- 1) Déterminer l'ensemble des points invariants de  $f_0$ . **(0,5 point)**
- 2) Montrer que l'image par  $f_0$  du plan P est une droite  $(\Delta)$  globalement invariante par  $f_0$  dont on donnera une équation cartésienne. **(1 point)**
- 3) Montrer qu'il existe une constante réelle non nulle  $k$  telle que pour tout point M de  $(\Delta)$ , d'image M' par  $f_0$  on ait :  $\overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$ . **(0,5 point)**
- 4) Montrer que  $f_0$  est la composée d'une projection  $p$  et d'une homothétie  $h$  que l'on déterminera en donnant leurs expressions analytiques respectives et en précisant leurs éléments caractéristiques. **(2 points)**

**Partie C**

On suppose que  $\lambda \neq 0$  et on pose  $f_\lambda^2 = f_\lambda \circ f_\lambda$  et pour tout entier  $n$  supérieur à 2

$f_\lambda^n = f_\lambda \circ f_\lambda^{n-1}$ . On considère la droite  $(D_\lambda)$  d'équation  $y = x + k$ .

- 1) a) Montrer que l'image de la droite  $(D_\lambda)$  par  $f_\lambda$  est la droite  $(D'_\lambda)$  d'équation  $y = x - k$ . **(0,5 point)**  
b) En déduire l'image de la droite  $(D_\lambda)$  par  $f_\lambda^n$  suivant les valeurs de  $n \in \mathbb{N} - \{0; 1\}$ . **(0,5 point)**
- 2) Soit  $A_0$  le point de coordonnées  $(1; 0)$ . On pose  $A_1 = f_\lambda(A_0)$  et, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2,  $A_n = f_\lambda^n(A_0)$ .
  - a) Montrer, par récurrence, que les coordonnées  $(x_n; y_n)$  de  $A_n$  sont pour tout entier naturel non nul de la forme : 
$$\begin{cases} x_n = 2 u_n(\lambda) + (-1)^n \\ y_n = 2 u_n(\lambda) \end{cases}$$
 où  $u_n(\lambda)$  est un polynôme en  $\lambda$  de degré  $(n - 1)$ . **(1 point)**
  - b) Préciser la relation qui existe entre  $u_n(\lambda)$  et  $u_{n+1}(\lambda)$ . **(0,5 point)**
  - c) En déduire que si,  $\lambda \neq -1$ , alors :  $u_n(\lambda) = \frac{\lambda^n - (-1)^n}{\lambda + 1}$ . **(1 point)**
  - d) On suppose que  $\lambda = -1$ . Calculer  $u_1(\lambda)$   $u_2(\lambda)$   $u_3(\lambda)$ . **(0,5 point)**  
Exprimer  $u_n(\lambda)$  en fonction de  $n$ . **(0,5 point)**