

REPUBLIQUE DU NIGER MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION TECHNOLOGIQUE OFFICE DU BACCALAUREAT, DES EQUIVALENCES ET DES EXAMENS ET CONCOURS DU SUPERIEUR (OBEECS)	BACCALAUREAT SESSION 2025	EPREUVE : Mathématiques
	SERIE/FILIERE : C, E	DUREE : 4H COEFFICIENT : 6 GROUPE : 1 ^{er} groupe

Exercice 1 (4 points)

Soit $M = \{1; j; j^2\}$ l'ensemble des racines cubiques de 1 dans \mathbb{C} avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et a et b deux nombres complexes fixés.

- 1) A l'aide de deux tableaux à double entrée avec λ en colonne et μ en ligne montrer que $\lambda^2\mu$ et $\lambda\mu^2$ prennent exactement 3 valeurs différentes lorsque $(\lambda; \mu)$ décrit $M \times M$ (1 point)
- 2) Soit Δ l'ensemble des nombres complexes $(\lambda a + \mu b)^3$ quand $(\lambda; \mu)$ décrit $M \times M$. Démontrer que Δ comporte au plus trois éléments. (1 point)
- 3) a) Vérifier que $(a + b)^3$ est solution dans \mathbb{C} de l'équation (E): $(z - a^3 - b^3)^3 - 27 a^3 b^3 z = 0$. (0.5 point)
 b) Prouver que tous les autres éléments de Δ sont solutions de (E). (0.5 point)
- 4) On pose $a^3 = 2 + 2i$ et $b^3 = 8i$. Déterminer une solution particulière de l'équation (E₁): $(z - 2 - 10i)^3 + 432(1 - i)z = 0$; puis en utilisant ce qui précède déduire les deux autres solutions de (E₁). (1 point)

Exercice 2 (5 points)

Soit P le plan affine rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. Soit α, β deux réels et $f_{(\alpha, \beta)}$ l'application de P qui à tout point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ associe le point $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ telle que $\begin{cases} x' = 3x + \alpha \\ y' = -3y + \beta \end{cases}$
 - a) Démontrer que $f_{(\alpha, \beta)}$ admet un seul point invariant Ω . (0.5 point)
 - b) Montrer que $f_{(\alpha, \beta)} = S \circ h$ où S est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses et h une homothétie dont on déterminera le rapport et le centre. (1 point)
2. On prend $(\alpha, \beta) = (6; 12)$ et $f = f_{(6, 12)}$
 - a) Définir l'application réciproque f^{-1} . (0.5 point)
 - b) On définit la suite des points M_n par $\begin{cases} M_1 = O \\ M_{n+1} = f^{-1}(M_n) \end{cases}$, pour tout $n \geq 1$
 - (i) Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} les coordonnées de M_{n+1} en fonction de x_n et y_n les coordonnées de M_n . (0.5 point)

- (ii) Déterminer les réels a et b tels que les suites définies par $u_n = x_n - a$ et $v_n = y_n - b$ soient des suites géométriques dont on précisera pour chacune sa raison et son premier terme. **(1 point)**
- (iii) En déduire les termes généraux x_n et y_n en fonction de n . **(0.5 point)**
- (iv) Calculer les limites de x_n et y_n quand n tend vers $+\infty$. **(0.5 point)**
- (v) Justifier que la suite des points M_n converge vers une position limite. **(0.5 point)**

Problème (11 points)

On considère la fonction f_1 définie sur $[0 ; +\infty[$, $f_1(x) = xe^{-x^2}$ et on appelle (C_1) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité graphique 4 cm.

Partie A

1. Etudier les variations de f_1 . **(1 point)**
2. Calculer la limite de f_1 en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat. **(0.25 + 0.25 point)**
3. Dresser le tableau de variation de f_1 . **(0.5 point)**
4. On appelle (Δ) la droite d'équation $y = x$; déterminer la position de (C_1) par rapport à (Δ) . **(0.75 point)**
5. Tracer (C_1) et (Δ) . **(1 point)**

Partie B

On considère la fonction f_3 définie sur $[0 ; +\infty[$ $f_3(x) = x^3 e^{-x^2}$ et on appelle (C_3) sa courbe représentative.

1. Montrer que pour tout x positif $f_3'(x)$ a le même signe que $3 - 2x^2$. **(0.5 point)**
En déduire le sens de variation de f_3 . **(0.5 point)**
2. Calculer la limite de f_3 en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat. **(0.5 point)**
3. Déterminer la position relative de (C_1) et (C_3) . **(0.75 point)**
4. Tracer (C_3) dans le même repère que (C_1) . **(0.5 point)**

Partie C

On désigne par n un entier naturel non nul et on considère la fonction f_n définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f_n(x) = x^n e^{-x^2}$. On note (C_n) la courbe représentative de f_n .

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$; f_n admet un maximum en $b_n = \sqrt{\frac{n}{2}}$. On note α_n ce maximum. **(0.5 point)**
2. On appelle S_n le point de (C_n) d'abscisse $\sqrt{\frac{n}{2}}$. Montrer que, pour tout n , (C_n) passe par S_2 . Placer S_1, S_2 et S_3 sur la même figure. **(0.5 + 0.5 point)**
3. Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^{\frac{x}{2}[-1 + \ln(\frac{x}{2})]}$
 - a) Etudier le sens de variation de g . **(1 point)**
 - b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\alpha_n = g(n)$. **(1 point)**
 - c) En déduire que l'ordonnée de S_n est supérieure ou égale à celle de S_2 . **(1 point)**